УДК 330.356

О. І. Ляшенко,
д. е. н., доцент, професор кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ СОЛОУ-СВЕНА З КАПІТАЛОІНТЕНСИВНИМ ТА ТРУДОІНТЕНСИВНИМ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОГРЕСОМ

O. Liashenko,
Doctor of Economics, Docent, Professor of Economic Cybernetics Department, Taras Shevchenko National University of Kyiv

SOLOW-SVEN MODEL OF ECONOMIC GROWTH WITH CAPITAL INTENSIVE AND LABOR INTENSIVE TECHNOLOGICAL PROGRESS

У роботі запропонована модифікація моделі економічного зростання Солоу-Свена, що полягає у відмові від гіпотези про сталість норми збереження. Проаналізований випадок, коли в моделі присутні капіталоінтенсивний та трудоінтенсивний технологічний прогрес. Показано, що в довготривалій перспективі в стаціонарному стані норма збереження прямує до нуля, а економіка підтримує себе за рахунок зростаючого капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

The paper presents a modification of Solow-Sven model of economic growth, that is to abandon the hypothesis of constancy preservation norms. Analyzed the case where the model capital intensive and labor intensive technological progress are present. It is shown that in the long run in steady state preservation norm tends to zero and the economy maintains itself by growing capital intensive technological progress.

Ключові слова: модель економічного зростання Солоу-Свена, капіталоінтенсивний та трудоінтенсивний технологічний прогрес, неокласична виробнича функція, стаціонарний стан економічного розвитку, перехідна динаміка.
Key words: Solow-Sven model of economic growth, capital intensive and labor intensive technological progress, neoclassical production function, steady state of economic development, transitional dynamics.

ВСТУП

Моделі економічного зростання займають значне місце в економіко-математичних дослідженнях ще з 30-х років минулого століття [1]. Добре відомі і детально вивчені моделі Харрода-Домара, Філіпса, Хікса, Самуельсона, Рамсея, Солоу-Свена, Касса-Кіпманса, Ромера, Лукаса та інших. Модель, яку ми розглядаємо і модифікуємо в цій роботі, побудована Р. Солоу [2] та Т. Своном [3].

Ключовим моментом моделі Солоу-Свена стала неокласична виробнича функція зі стандартним припущенням про сталість норми збереження з метою створення гранично простої моделі економіки загальної рівноваги. Найважливішим наслідком цієї моделі стало те, що при відсутності тривалих технологічних покращень зростання на душу населення з часом асимптоматично зупиняється. Цей модельний дефект, як правило, виправляють шляхом припущення, що технологічний прогрес відбувається екзогенним чином. При цьому в моделі це враховується введенням замість трудових ресурсів $L(t)$ ефективної праці $\hat{L}(t)=e^{xt}L(t)$, де x > 0 — заданий темп трудоінтенсивного технологічного прогресу. На цьому шляху визначається стаціонарний розв'язок та вивчається перехідна динаміка.

МЕТА СТАТТІ

Мета цієї роботи — дослідити модифікацію моделі Солоу-Свена, що додатково до трудоінтенсивного враховує ще капіталоінтенсивний технологічний прогрес шляхом введення замість капітальних ресурсів $K(t)$ ефективного капіталу $\hat{K}(t)=e^{zt}K(t)$, де $z>0$ — заданий темп капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

1. Неокласична виробнича функція. Виробнича функція $F(K,L)$ називається неокласичною, якщо вона має такі властивості:

1) стала ефективність зі зростанням виробництва:
$F(\lambda K, \lambda L)=\lambda F(K, L)$ для всіх $\lambda>0$ (1);

2) додатна та зменшуюча віддача ресурсів:

$$\frac{\partial F}{\partial K}>0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0;$$
$$\frac{\partial F}{\partial L}>0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0; \qquad (2)$$

3) умови Інади [4]:

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K}=\lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L}=\infty; \quad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial F}{\partial K}=\lim_{L\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L}=0; \qquad (3)$$

4. істотність:

$$F(0,L)=F(K,0)=0 \qquad (4).$$

З перших трьох властивостей випливає, що випуск прямує до нескінченності при прямуванні будь-якого з ресурсів до нескінченності [1].

У неокласичній виробничій функції можна перейти до змінних на душу населення. Дійсно, обираючи в (1) $\lambda=\frac{1}{L}$, одержуємо

$$Y=F(K,L)=LF\left(\frac{K}{L},1\right)=Lf(k) \qquad (4),$$

де $k=\frac{K}{L}$ — капітал на одного працівника, $y=\frac{Y}{L}$ — випуск на одного працівника і функція $f(k)=F(k,1)$. Таким чином, неокласична виробнича функція може бути записана в інтенсивній формі

$$y=f(k) \qquad (5).$$

Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=f'(k) \qquad (6),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=f(k)-kf'(k) \qquad (7),$$

$$\lim_{k\to 0}f'(k)=\infty, \quad \lim_{k\to\infty}f'(k)=0 \qquad (8).$$

Однією з найпростіших і найбільш розповсюджених виробничих функцій, яка вважається зручною для опису реальних економік, є функція Кобба-Дугласа

$$Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (9),$$

де $A>0$ — рівень технології, α — константа, 0<α<1.

У конкурентній економіці капітал і праця оплачуються своїми граничними продуктами, тобто граничний продукт капіталу дорівнює ціні оренди R, а граничний продукт праці дорівнює ставці заробітної плати ω. Отже,

$$R=f'(k), \quad \omega=f(k)-kf'(k) \qquad (10).$$

2. Модель Солоу-Свена з технологічним прогресом у капіталоінтенсивній та трудоінтенсивній формах.

Припустимо, що виробнича функція включає капіталоінтенсивний технологічний прогрес у вигляді множника до обсягу капіталу $K(t)$ (технологічний член зростає зі сталим темпом $z\geq 0$), а також включає трудоінтенсивний технологічний прогрес у вигляді множника e^{xt} до обсягу праці $L(t)$ (технологічний член зростає зі сталим темпом $x\geq 0$):

$$Y=F\left(e^{zt}K(t),e^{xt}L(t)\right) \qquad (11).$$

Тоді зміни в основних фондах протягом часу описуються диференціальним рівнянням:

$$\dot{K}=sF\left(e^{zt}K,e^{xt}L\right)-\delta K \qquad (12),$$

де s — норма збереження, $0<s<1$, $\delta>0$ — сталий темп вибуття капіталу. Будемо вважати, що населення $L(t)$ зростає зі сталим екзогенним темпом приросту $\dot{L}/L=n\geq 0$. Якщо ми нормуємо число людей в момент $t=0$ до одиниці, то населення (робоча сила) в момент часу t описується рівнянням

$$L(t)=e^{nt} \qquad (13).$$

Позначимо

$$e^{zt}K=\hat{K}, \quad e^{xt}L=\hat{L} \qquad (14),$$

де $\hat{K}$ — ефективний обсяг капіталу, $\hat{L}$ — ефективний обсяг праці.

Поділимо обидві частини співвідношення (11) на $\hat{L}$, одержимо виробничу функцію в інтенсивній формі

$$\frac{Y}{\hat{L}}=F\left(\frac{\hat{K}}{\hat{L}},1\right)=f\left(\frac{\hat{K}}{\hat{L}}\right) \qquad (15),$$

де всі величини виражені в розрахунку на одиницю ефективного обсягу праці.

Позначимо

$$\hat{y}=\frac{Y}{\hat{L}}, \quad \hat{k}=\frac{\hat{K}}{\hat{L}}. \qquad (16).$$

Тоді обсяг випуску на одиницю ефективної праці перетворюється до вигляду

$$\hat{y}=f\left(\hat{k}\right) \qquad (17).$$

Над рівнянням зростання основних фондів (12) зробимо перетворення, щоб перейти до нової основної змінної $\hat{k}(t)$. Після ділення обох частин рівняння (12) на $\hat{L}$ одержимо співвідношення

$$\frac{\dot{K}}{\hat{L}}=sf\left(\hat{k}\right)-\delta e^{-zt}\hat{k}. \qquad (18).$$

Оскільки

$$\dot{\hat{k}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{K}}{\hat{L}}\right)=\frac{\dot{\hat{K}}}{\hat{L}}-\frac{\hat{K}\dot{\hat{L}}}{\hat{L}^2}=\frac{1}{\hat{L}}\frac{d}{dt}\left(e^{zt}K\right)-\frac{\hat{k}}{\hat{L}^2}\frac{d}{dt}\left(e^{xt}L\right)=z\hat{k}+e^{zt}\frac{\dot{K}}{\hat{L}}-(n+x)\hat{k},$$

то звідси з урахуванням співвідношення (18) одержуємо шукане рівняння

$$\dot{\hat{k}}=e^{zt}sf\left(\hat{k}\right)-(\delta+n+x-z)\hat{k} \qquad (19).$$

Введемо до розгляду ефективну норму збереження $\hat{s}$ згідно правилом

$$s=\hat{s}e^{-zt}, \quad \hat{s}=const, \quad 0<\hat{s}<1.$$

Очевидно, що $\hat{s}=s(0)$ — відома стала на початку часового періоду $t=0$.

Тоді замість (19) одержимо диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\hat{k}}=\hat{s}f\left(\hat{k}\right)-(\delta+n+x-z)\hat{k}. \qquad (20).$$

Ще раз нагадаємо: щоб отримати рівняння (20), довелося відмовитись від класичної гіпотези моделі Солоу-Свена про сталість в часі норми збереження. Саме в цьому і полягає наша модифікація моделі Солоу-Свена.

Член $\delta+n+x-z$ в правій частині рівняння (20) тепер є ефективною нормою амортизації питомої величини $\hat{k}=\hat{K}/\hat{L}$. Якби норма збереження була нульовою, то $\hat{k}$ зменшувалась би частково в зв'язку з вибуттям $\hat{K}$ з темпом $\delta-z$, частково в зв'язку зі зростанням $\hat{L}$ з темпом $n+x$.

3. Перехідна динаміка.

Аналіз поведінки моделі в часі проведемо в два етапи [1]. Спочатку розглянемо довгостроковий розвиток або стаціонарний стан, а потім опишемо короткострокову поведінку або перехідну динаміку. У моделі Солоу-Свена стаціонарний стан відповідає $\dot{\hat{k}}=0$ в рівнянні (20), тобто перетин кривої $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)$ з прямою $(\delta+n+x-z)\hat{k}$. Відповідне значення $\hat{k}$ позначимо $\hat{k}^*$. Очевидно, $\hat{k}^*$ задовольняє умові

$$\hat{s}f\left(\hat{k}^*\right)=(\delta+n+x-z)\hat{k}^*, \quad \hat{k}^*>0. \qquad (21).$$

Поділимо обидві частини рівняння на $\hat{k}$. Одержимо в правій частині диференціального рівняння

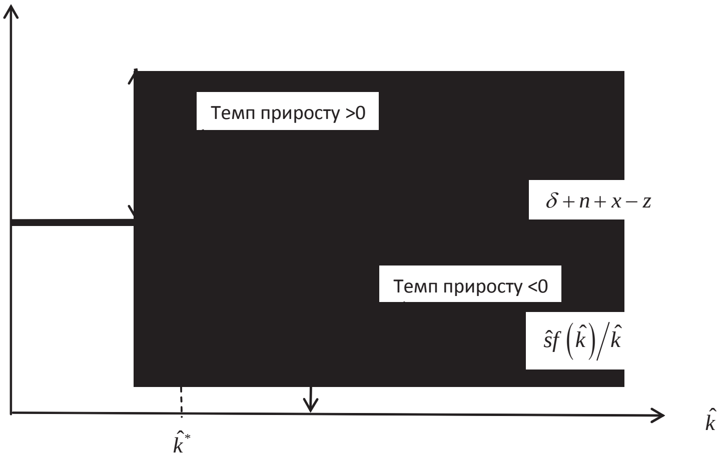

Рис. 1. Модель Солоу-Свена з технологічним прогресом

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}=\hat{s}\frac{f\left(\hat{k}\right)}{\hat{k}}-(\delta+n+x-z) \qquad (22),$$

вираз у вигляді різниці двох членів, перший з яких є добутком $\hat{s}$ та середнього продукту капіталу, а другий є константою $(\delta+n+x-z)$. При цьому середній продукт капіталу $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ змінюється з часом.

За визначенням стаціонарний стан $\hat{k}^*$ задовольняє умові (21). Перехідна динаміка величини $\hat{k}$ якісно така ж, як і динаміка k в класичній моделі Солоу-Свена. Зокрема, ми можемо намалювати таку ж картинку, як у класичному випадку, на якій по горизонтальній осі відкладаються $\hat{k}$, вниз нахилена крива тепер $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$, а горизонтальна лінія знаходиться на рівні $\delta+n+x-z$ (рис. 1).

Перший вираз $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$, як і в [1], назвемо кривою збереження, а другий $(\delta+n+x-z)$ — кривою амортизації. Похідна від $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ по $\hat{k}$ дорівнює $-\left[f\left(\hat{k}\right)-\hat{k}f'\left(\hat{k}\right)\right]/\hat{k}^2$. Вираз у квадратних дужках дорівнює граничному продукту праці, який додатній. Отже, похідна від $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ від'ємна, що і відображено на рис. 1. Темп приросту ефективного капіталу на ефективного працівника $\left(\hat{k}=\hat{K}/\hat{L}\right)$ характеризується відстанню по вертикалі між кривою $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ та прямою ефективного вибуття $\delta+n+x-z$. Економіка знаходиться в стаціонарному стані, коли величина $\hat{k}$ стала. Тоді згідно (17) і величина $\hat{y}$ теж стала.

Крива збереження має від'ємний нахил, що прямує до ∞ при $\hat{k}\to 0$ та прямує до 0 при $\hat{k}\to\infty$. Крива амортизації являє собою горизонтальну пряму на рівні $\delta+n+x-z$. Вертикальна відстань між кривою збереження і кривою амортизації дорівнює темпу приросту $\hat{k}$, а точка перетину відповідає стаціонарному стану. Оскільки $\delta+n+x-z>0$ та $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ знижується монотонно з ∞ до 0, то крива збереження і пряма амортизації перетинаються в єдиній точці. Отже, стаціонарне значення $\hat{k}^*>0$ існує і єдине.

На рис. 1. видно, що зліва від стаціонарного стану крива $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ лежить вище $\delta+n+x-z$. Тому темп приросту $\hat{k}$ залишається додатнім по мірі зростання $\hat{k}$. Якщо $\hat{k}$ зростає, то $\dot{\hat{k}}/\hat{k}$ зменшується і досягає нуля, як тільки $\hat{k}$ досягає $\hat{k}^*$. Економіка асимптотично прямує до стаціонарного стану, в якому $\hat{k}$ не змінюється. Аналогічні міркування можна привести для демонстрації того, що якщо економіка стартує вище стаціонарного стану $\hat{k}(0)>\hat{k}^*$, то темп приросту $\hat{k}$ буде від'ємним, а $\hat{k}$ буде знижуватись з часом. Коли $\hat{k}$ наближається до $\hat{k}^*$, темп приросту зростає і досягає нуля. Таким чином, система глобально стійка: для будь-якого початкового стану $\hat{k}(0)>0$ економіка збігається до свого єдиного стаціонарного стану $\hat{k}^*>0$.

У стаціонарному стані змінна $\hat{k}$ стала, але при цьому змінні $\hat{y}$ та $\hat{c}$ не є сталими. Оскільки

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}=\frac{\dot{k}}{k}-(x-z)=\frac{\dot{K}}{K}-(n+x-z),$$

то в стаціонарному стані змінна k зростає з темпом $x-z$, а змінна K зростає з темпом $n+x-z$. При цьому оскільки ефективна норма збереження $\hat{s}=const$, то норма збереження $s=\hat{s}e^{-zt}$ зменшується в часі і прямує до 0 при $t\to\infty$. Це означає, що в довготривалій перспективі в стаціонарному стані економіка не потребує значних збережень, а функціонує виключно за рахунок зростаючого капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

Література:
1. Барро Р.Дж. Экономический рост / Р.Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин; пер. с англ. — М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2010. — 824 с.
2. Solow Robert M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economic. — 1959. — 70, February. — P. 65—94.
3. Swan Trevor W. "Economic Growth and Capital Accumulation" // Economic Record, 32, November. — 1956. — P. 334—361.
4. Inada Ken-Ichi. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // Review of Economic Studies. — 1963. — 30, June. — P. 110—127.

References:
1. Barro R. J. Economic growth / R. J. Barrot, x. Sala-and-Martin; front with imp. — M.: an entity bean. — Laboratory of knowledge. 2010. — 824 p.
2. Solow Robert M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economic. — 1959. — 70, February. — P. 65—94.
3. Swan Trevor W. "Economic Growth and Capital Accumulation" // Economic Record, 32, November. — 1956. — P. 334—361.
4. Inada Ken-Ichi. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // Review of Economic Studies. — 1963. — 30, June. — P. 110—127.

Стаття надійшла до редакції 30.04.2013 р.