УДК 339.743

В. В. Лещев,
аспирант, МФТИ

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ВАЛЮТНОГО КУРСА

В статье приведены результаты исследования прогнозирования валютных курсов, используя интегральное уравнение Гельфанда-Левитана. Доказана теорема о применимости метода для валютных пар, проведено численное моделирование с успешным результатом.

In article results of research of forecasting of rates of exchange are resulted using Gelfand-Levitan's integrated equation. The theorem of applicability of a method for currency pairs is proved, numerical modelling with successful result is spent.

Ключевые слова: прогнозирование валютных курсов, уравнение Гельфанда-Левитана, математическое моделирование.
Key words: Forecasting of rates of exchange, Gelfand-Levitan's equation, mathematical modelling.

Известно, что с 1 февраля 2005 года Центральным банком РФ было введено понятие бивалютной корзины. ЦБ установил линейную связь между курсом евро и курсом доллара. В этом случае возникает вопрос. нельзя ли установить зависимость одной валютной пары через другую в общем случае? Ведь уравнение бивалютной корзины установлено только для указанных валютных пар. Открытым остается и вопрос о характере связи курса евро по отношению к доллару и курса доллара по отношению к рублю и гривне, так как отношение евро к рублю или гривне в общем случае не является линейной функцией.

В ряде работ, опубликованных в последнее время, делались попытки установить такие взаимозависимости, однако точность предложенных методов оставляет желать лучшего. Известно, что наиболее распространенная на сегодняшний день модель ценообразования опционов в непрерывном времени Дж. Кокса (J.C. Cox), Р. Росса (R.A. Ross) и М. Рубинштейна (M. Rubinstein), которые предложили модель ценообразования опционов в дискретном времени, до сих пор изучена недостаточно. Это подтверждается также в современных работах С.Н. Волкова, А.В. Мельникова, М.Л. Нечаева, В.Н. Тутубалина, А.Н. Ширяева и других авторов [7; 8; 9; 10].

Актуальность приведенной работы заключается в том, что сделана попытка описать изменение валютных курсов с помощью одномерного волнового уравнения. Следует отметить, что ответ на вопросы, связанные с тем, как избежать неоднозначности обозначений (что в волновом уравнении обозначает плотностью среды и что является решением с позиции валютных курсов?), дает доказанная ниже теорема о том, что валютные пары удовлетворяют интегральному уравнению Гельфанда-Левитана. В этом уравнении сформулированы требования к входящим в него функциям и установлены условия разрешимости обратной задачи, а так же показано, как найти неизвестный курс второй валюты по известному курсу первой валюты.

При этом, выводится интегральное уравнение путем преобразования производной по времени функции первой валютной пары. В результате проделанных вычислений получилось интегральное уравнение Гельфанда-Левитана, хотя заранее это было трудно предположить.

С точки зрения вычислительной математики и математической физики способы решения одномерных уравнений Гельфанда-Левитана, являющихся параметрическим семейством интегральных уравнений типа свертки, достаточно хорошо разработаны. Для уравнений же типа свертки весьма эффективен метод преобразования Фурье, при котором сначала переходят в спектральную область, а затем — обратно во временную. Тонкость здесь заключается в выборе параметра регуляризации и определении условий единственности решения задачи. Параметр регуляризации вычисляется с использованием программы PTIKR [2]. Единственность же решения обеспечивается заданием интервала поиска решения для валютного курса и начального значения отыскиваемого курса валют.

Математическое моделирование позволяет сделать прогноз динамики второй валютной пары по первой как в долгосрочной, так и краткосрочной перспективе. При рассмотрении большого числа зависимостей нами было отмечено сходство результатов динамики валют с результатами сейсмических исследований, а именно — характерно быстрое изменение значений курса в неустойчивые периоды времени и быстрые изменения плотности среды (массива горных пород) в случае неустойчивости массива. Обнаружена полная аналогия. Нами также было отмечено, что в случае ослабленных пород (то же для курса валюты) характерно повышенное значение на отдельных участках среднеквадратичного отклонения и снижение квадрата коэффициента корреляции в случае построения линий тренда.

В связи со сказанным сначала по аналогии рассмотрим одномерную обратную задачу сейсмики, в которой по зарегистрированным на поверхности колебаниям (перемещениям) продольных волн $f(t)$, где t — время, находят распределение вглубь горного массива плотности горной породы. Источник упругих волн является импульсным с производной перемещения на поверхности равной дельта-функции, умноженной на амплитудный коэффици-

Рис. 1. Пример расчета курса доллар к рублю на основании 250 точек

ент c(+0). С точки зрения вычислительной математики — это первый временной шаг.

При времени, меньшем заданного момента, поверхность не колеблется и перемещения U(x,t) равны нулю. При t=0 начинает действовать импульсный источник с производной, равной дельта-функции. При t>+0 источник уже не действует.

Т.е. рассматриваем уравнение (1) для положительных вещественных координат *x* и времени *t*.

Рассмотрим одномерную обратную динамическую задачу сейсмики:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{c_x}{c}\frac{\partial U}{\partial x}, x \in R_+, t \in R_+ \quad (1),$$

$$U\big|_{t<0} \equiv 0 \quad (2),$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = c(+0)\delta(t) \quad (3).$$

Требуется определить коэффициент C(x), если о решении прямой задачи акустики известна дополнительная информация [2; 3]:

$$U\big|_{x=0} = f(t), t \in R_+ \quad (4),$$

Где R_+ — множество положительных вещественных чисел.

C(x) в задачах акустики имеет смысл модуля упругости, равного отношению напряжения σ к деформации ε, т.е:

$$C(x) = E(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (5).$$

Нам следует доказать, что в качестве C(x) — можно рассматривать второй курс валют, например, [Rub/€], для которого известно начальное значение C(+0). Регистрируемый же курс валюты — f(t) (основной курс [$/€]).

Так же необходимо доказать, что по известному валютному курсу, зарегистрированному в течение длительного промежутка времени (около 8 месяцев) — можно по выведенному интегральному уравнению найти второй валютный курс.

Оказалось, забегая вперед, что такое интегральное уравнение (6) относится к уравнению Гельфанда-Левитана, хорошо изученному в динамической постановке, для решения которого имеются готовые программы для ЭВМ. И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан, М.Г. Крейн, А.С. Алексеев [2; 3; 4; 5; 6] показали, что нелинейная одномерная обратная задача для волнового уравнения (1)-(4) сводится к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма:

$$-2f(+0)\varphi(t) - \int_{-x}^{x} f'(t-s)\varphi(s)ds = -1, t \in (0,x) \quad (6),$$

где *f(t)* — перемещения, штрих означает производную по времени, —x,x — переменные пределы интегрирования. Со скоростью, равной 1, падающая волна распространяется вглубь массива до глубины x, отражается и идет в обратном направлении, где регистрируется на поверхности массива пород. Анализ подынтегрального выражения показывает, что это интегральное уравнение типа свертки. Свертка функций f и φ дифференцируется по правилам дифференцирования свертки.

Если уравнение (6), которое было нормировано (справа стоит — 1), разрешимо относительно $x \in (0,T)$, то $C(x)$ находится следующим образом:

$$c(0) = [2\varphi(+0)]^{-1},$$
$$c(x) = \varphi(+0)[2\varphi^2(x-0)]^{-1} \quad (7),$$

где φ (x) — решение интегрального уравнения (6).

В последующих выкладках для курсов валют размерность φ (x) обратна размерности $C(x)$ и равна, например, [€ /Rub].

Размерность же произведения $f(t)\varphi(t)$ равна, например, [$/Rub], если *f(t)* есть отношение доллар/евро.

Далее покажем этого эффективность применения метода для определения одной валютной пары через другую.

Будем считать известным курс евро по отношению к рублю и начальный курс доллара. В качестве неизвестного курса выступает курс доллара к рублю в остальные моменты времени.

Из анализа рис. 1 и 2 можно сделать вывод о наличии трех линий спада курса, начиная с отметок 0, 50 и 100 точек, минимум в районе 150 точки.

После предварительной линейной фильтрации входных данных по 5 точкам в скользящем временном окне получаются неплохие результаты: несмотря на различие в квадрате коэффициента корреляции полиномиального тренда для рассчитанного и зарегистрированного курсов доллара к рублю, все экстрему-

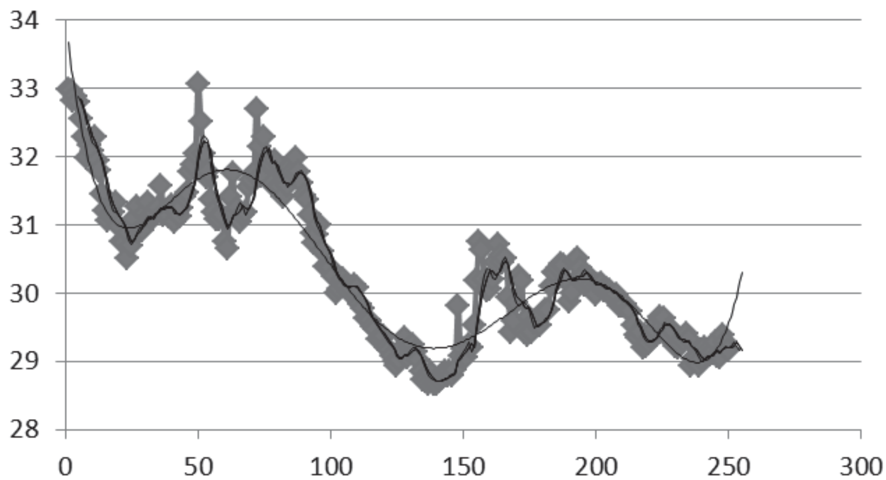

Рис. 2. Истинный курс доллара к рублю для 250 точек

мы тренда отображаются с ошибкой не более 3—5% за 250 дней.

Пусть $f_{€/R}$ — курс евро по отношению к рублю, а $f_{\$/R}$ — курс доллара по отношению к рублю.

Запишем частную производную по времени t (8):

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}$$

Умножим на dt части равенства (8) и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T \partial f=\int_0^T \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt$$

Вычислим интеграл в правой части по частям:

$$\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot d\varphi=\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\varphi\Big|_0^x-\int_0^x \varphi\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}d\varphi \quad (9).$$

Далее, с учетом левой части уравнения:

$$f(T)-f(0)-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\varphi(x)+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\varphi(0)+$$

$$+\int_0^x \varphi\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \phi^2}d\varphi=0 \quad (10).$$

Обозначим $\frac{\partial f}{\partial \varphi}=f_1$ тогда

$$\tilde{f}_1\cong\frac{\varepsilon(x)-\varepsilon(0)}{d-c} \quad (11).$$

Это следует из того, что $\varepsilon\Big|_c^d=\int_c^d f_1 ds$, и является прямым следствием теоремы о среднем, где курс евро подвергается дробно-линейному преобразованию, d и c — пределы изменения курса доллара. С учетом понижения порядка уравнения из (10) получим:

$$\int_0^x f_1 d\varphi - f_1\cdot\varphi(x)+f_1\cdot\varphi(0)+$$

$$+\int_0^x \varphi\cdot\frac{\partial\ f_1}{\partial \varphi}d\varphi=0 \quad (12).$$

Откуда по теореме о дифференцировании свертки обобщенных функций заключаем, что интегралы равны и поэтому, возвращаясь к переменной t с учетом четности функции f1, получим уравнение Гельфанда-Левитана (6).

Теорема. Пусть регистрируемый $f(t)\in C^2$ валютный курс принадлежит к классу функций с непрерывной второй производной и $\varphi(t)\in C^1$ обратная к определяемому курсу — классу функций с непрерывной первой производной, тогда если $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\le F$ ограничена, то указанные функции удовлетворяют интегральному уравнению Гельфанда-Левитана с начальным условием (3):

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=c(+0)\delta(t), \quad (13).$$

$c(+0)=[2\varphi(0,0)]^{-1}$,
где c(+0)=-f(+0)

Доказательство.

Проинтегрируем (8) по t и в левой части запишем импульсный источник:

$$\int_{-T}^{T} df(t)-\int_{-T}^{T} c(+0)\delta(t)\,dt=\int_{-T}^{T}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot dt$$

Откуда, в силу четности f(t) получим после нормировки по C(+0) (14):

$$-1=\int_{-T}^{T}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot dt \quad (14).$$

Интеграл в правой части определен в силу непрерывности первой $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ производной и ограниченности $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\le F$.

И далее, переходя к новой переменной с изменением пределов интегрирования после интегрирования по частям в силу непрерывности второй производной f, имеем (15):

$$1=2\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\varphi(x)-\int_{-x}^{x}\varphi\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}d\varphi. \quad (15).$$

Откуда, понижая порядок уравнения, полагая $\frac{\partial f}{\partial \varphi}=f_1$ и учитывая, что интеграл представляет собой свертку, получим:

$$-1=2\cdot f_1\cdot\varphi(x)-\int_{-x}^{x}\varphi\cdot\partial f_1 \quad (16).$$

Откуда, переходя к временной области, будем иметь:

$$-1=2\cdot f_1(+0)\cdot\varphi(x',t)-$$

$$-\int_{-x'}^{x'}\varphi(x',s)\cdot\tilde{f}_1(t-s)ds \quad (17).$$

Что и требовалось доказать.

ВЫВОДЫ ПО СТАТЬЕ

1. Доказана теорема, в которой утверждается, что валютные пары удовлетворяют интегральному уравнению Гельфанда-Левитана.
2. Показана эффективность вычисления одной валютной пары по второй, используя метод преобразования Фурье и регуляризации по Тихонову при решении интегрального уравнения типа свертки для валютных пар.
3. Установлены необходимые условия гиперболичности связи курса евро/доллар и доллар/рубль.
4. Показана эффективность модели на основе прогнозирования курса доллар/рубль.

Литература:

1. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука. 1990. — 232 с.
2. Алексеев А.С., Добринский В.И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсми-ки//Математические проблемы геофизики/ АН СССР. Сиб. Отделение. ВЦ. — Новосибирск, 1975. — Вып.6, ч.2. — С. 7—53.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
4. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1951 — Т.15, № 4. — С. 309—360.
5. Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля //Докл. АН СССР — 1951. — Т.76, № 1. — С. 21—24.
6. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. — М.: Государственный университет Высшая школа экономики, 2001, — 260 с.
7. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука. Сиб. Отд., 1988.
8. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. — М., изд-во МГУ, 1992, — 395 с.
9. Тутубалин В.Н. Сопоставление с реальными данными некоторых моделей и результатов стохастической финансовой математики// Труды Математического ин-та РАН. — 2010.
10. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. — М.: Фазис, 1998. — 489 с.

Стаття надійшла до редакції 02.07.2010 р.